2023학년도 경희고등학교 수학교과 수업 시강 및 면접 문항

[안내사항]

1. 시강과 면접은 15~20분 진행됩니다.

2. 수업 시간에는 [붙임1]과 [붙임2]를 이용하여 다음 사항을 중점적으로 진행해주시기 바랍니다.

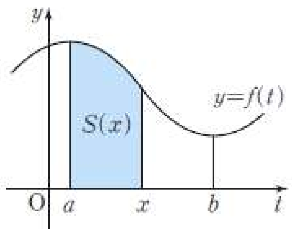
(1) $f(x) \geq 0$일 때, 곡선 $y = f(x)$과 x축 및 두 직선 $x = a$, $x = b$로 둘러싸인 도형의 넓이 식의 유도 (2) (1)에서의 정적분과 넓이 개념을 이용한 [붙임2]의 문항 해설

[붙임 1] 교과서 : 수학Ⅱ(동아출판)
[붙임 2] 관련 문항

[붙임 1] 교과서 : 수학Ⅱ(동아출판)

함수 $y=f(t)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(t)\geq 0$일 때, 곡선 $y=f(t)$와 t축 및 두 직선 $t=a$, $t=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 구해 보자.

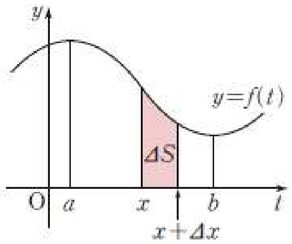
오른쪽 그림과 같이 닫힌구간 $[a,\ b]$에 속하는 임의의 x에 대하여 곡선 $y=f(t)$와 t축 및 두 직선 $t=a$, $t=x$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(x)$라고 하자. 그러면 $S(x)$는 닫힌구간 $[a,\ b]$에 속하는 모든 x에서 정의된 x의 함수이다.



이때 x의 증분 Δx에 대한 $S(x)$의 증분을 ΔS라고 하면

$$\Delta S=S(x+\Delta x)-S(x)$$

이다.



(i) $\Delta x>0$일 때

함수 $f(t)$는 닫힌구간 $[x,\ x+\Delta x]$에서 연속이므로 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 가진다.

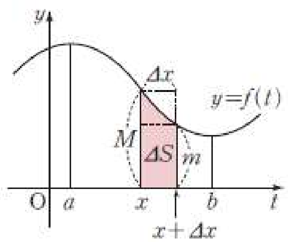
그 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라고 하면

$$m\Delta x\leq \Delta S\leq M\Delta x$$

이므로

$$m\leq \frac{\Delta S}{\Delta x}\leq M$$

이다.



(ii) $\Delta x<0$일 때에도 마찬가지 방법으로

$$m\leq \frac{\Delta S}{\Delta x}\leq M$$

이다.

함수 $f(t)$는 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이므로

$$\Delta x\to 0\text{이면 } m\to f(x)\text{이고 } M\to f(x)$$

이다. 따라서

$$\Delta x\to 0\text{이면 } \frac{\Delta S}{\Delta x}\to f(x)$$

이다. 즉,

$$S'(x)=f(x)$$

이므로 $S(x)$는 x의 함수 $f(x)$의 부정적분 중 하나이다.

이제 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$S(x)=F(x)+C\ (C\text{는 적분상수})$$

이고, $S(x)$의 정의에 따라 $S(a)=0$이므로

$$S(a)=F(a)+C=0\text{에서 } C=-F(a)$$

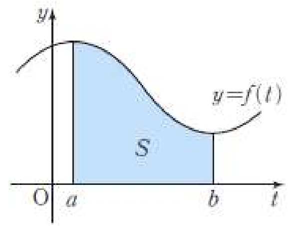
이다. 따라서

$$S(x)=F(x)-F(a)$$

이므로 곡선 $y=f(t)$와 t축 및 두 직선 $t=a$, $t=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=S(b)=F(b)-F(a)=\int_a^b f(t)\,dt$$

이다.

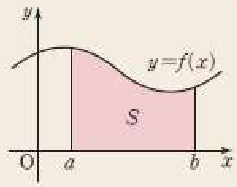


앞의 내용을 정리하면 다음과 같다.

정적분과 넓이

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(x)\geq 0$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$



[붙임 2] 관련 문항

※ 다음 문항은 학생들이 '정적분과 미분의 관계' 개념을 배우며 풀었던 문항이다.
본 차시 수업을 통해 배운 **'정적분과 넓이' 개념을 이용**해 아래 문항을 해설하시오.

[2020학년도 대학수학능력시험 수학(나) 20번]

다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여

$$\int_1^x f(t)dt = \frac{x-1}{2}\{f(x)+f(1)\}$$이다.

(나) $\int_0^2 f(x)dx = 5\int_{-1}^1 xf(x)dx$

$f(0)=1$일 때, $f(4)$의 값을 구하시오. (4점)